



Wydział Mechaniczny Energetyki i Lotnictwa  
Zakład Wytrzymałości Materiałów i Konstrukcji



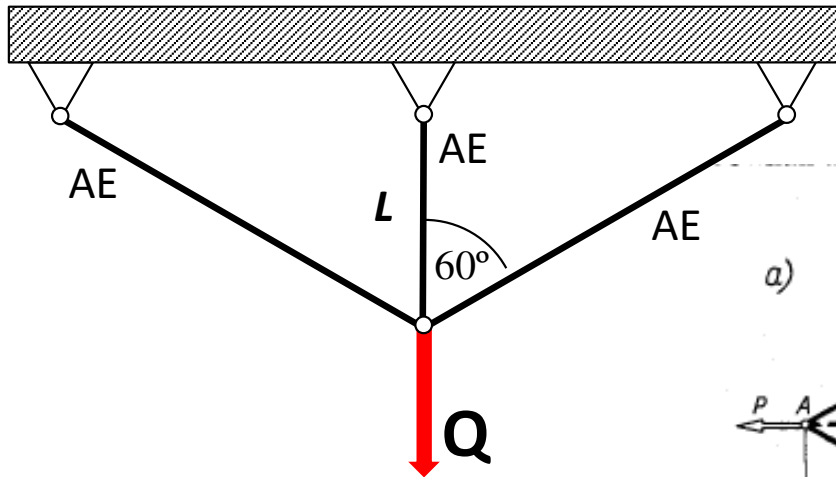
## Wykład 13

# Zagadnienia sprężysto-plastyczne

Rozciąganie kratownicy trójprętowej  
poza zakres sprężysty

Zginanie sprężysto-plastyczne belki  
i nośność graniczna

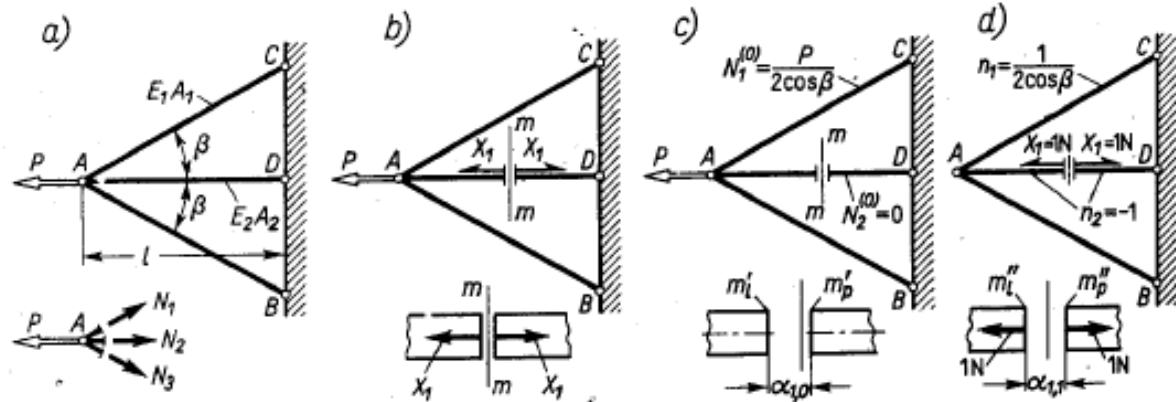
# Rozciąganie kratownicy trójprętowej poza zakres sprężysty



Zadanie statycznie niewyznaczalne:  
Rozwiązanie metodą sił (M-M) lub metoda przemieszczeń

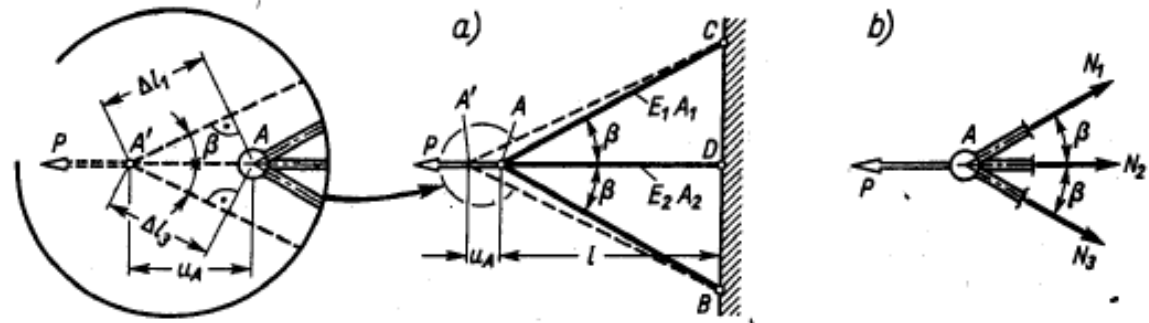
$$N_1 \sin \beta - N_3 \sin \beta = 0, \quad N_1 \cos \beta + N_2 + N_3 \cos \beta - P = 0, \quad (a)$$

$$X_1 = -\frac{P}{1 + 2 \cos^3 \beta (E_1 A_1 / E_2 A_2)},$$



Rys. 10.1. Wprowadzenie do metody sił

$$N_1 = N_1^{(0)} + n_1 X_1 = P \frac{(E_1 A_1 / E_2 A_2) \cos^2 \beta}{1 + 2 (E_1 A_1 / E_2 A_2) \cos^3 \beta} = N_3, \quad N_2 = -X_1.$$



Rys. 10.2. Wprowadzenie do metody przemieszczeń

$$\Delta l_1 = \Delta l_3 = u_A \cos \beta, \quad \Delta l_2 = u_A.$$

Tym wydłużeniom odpowiadają siły wzdłużne w prętach

$$N_1 = N_3 = E_1 A_1 \Delta l_1 / l_1 = E_1 A_1 u_A \cos^2 \beta / l, \quad N_2 = E_2 A_2 u_A / l.$$

zapewniające równowagę węzła A (rys. 10.2b), czyli

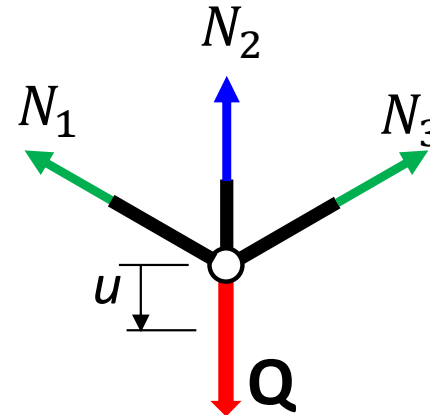
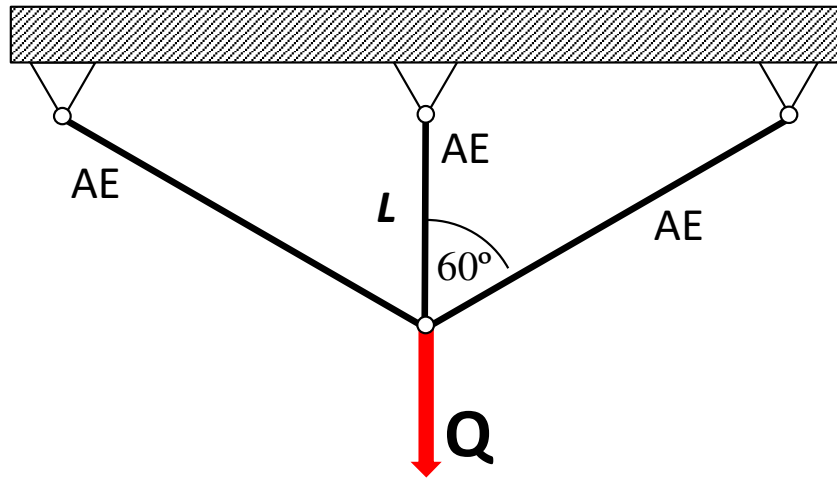
$$2N_1 \cos \beta + N_2 - P = 0.$$

Wstawiając wyrażenia (i) w powyższe równanie mamy

$$u_A = Pl / (2E_1 A_1 \cos^3 \beta + E_2 A_2),$$

# Rozciąganie kratownicy trójprętowej poza zakres sprężysty

Zadanie statycznie niewyznaczalne:  
Rozwiązanie metodą sił (M-M) lub metoda przemieszczeń

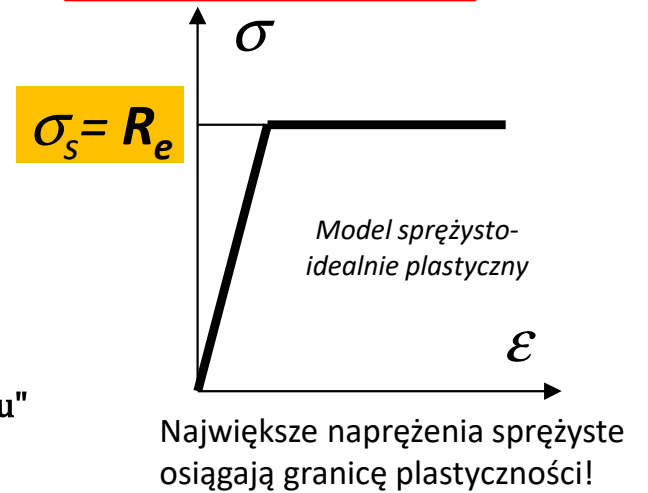
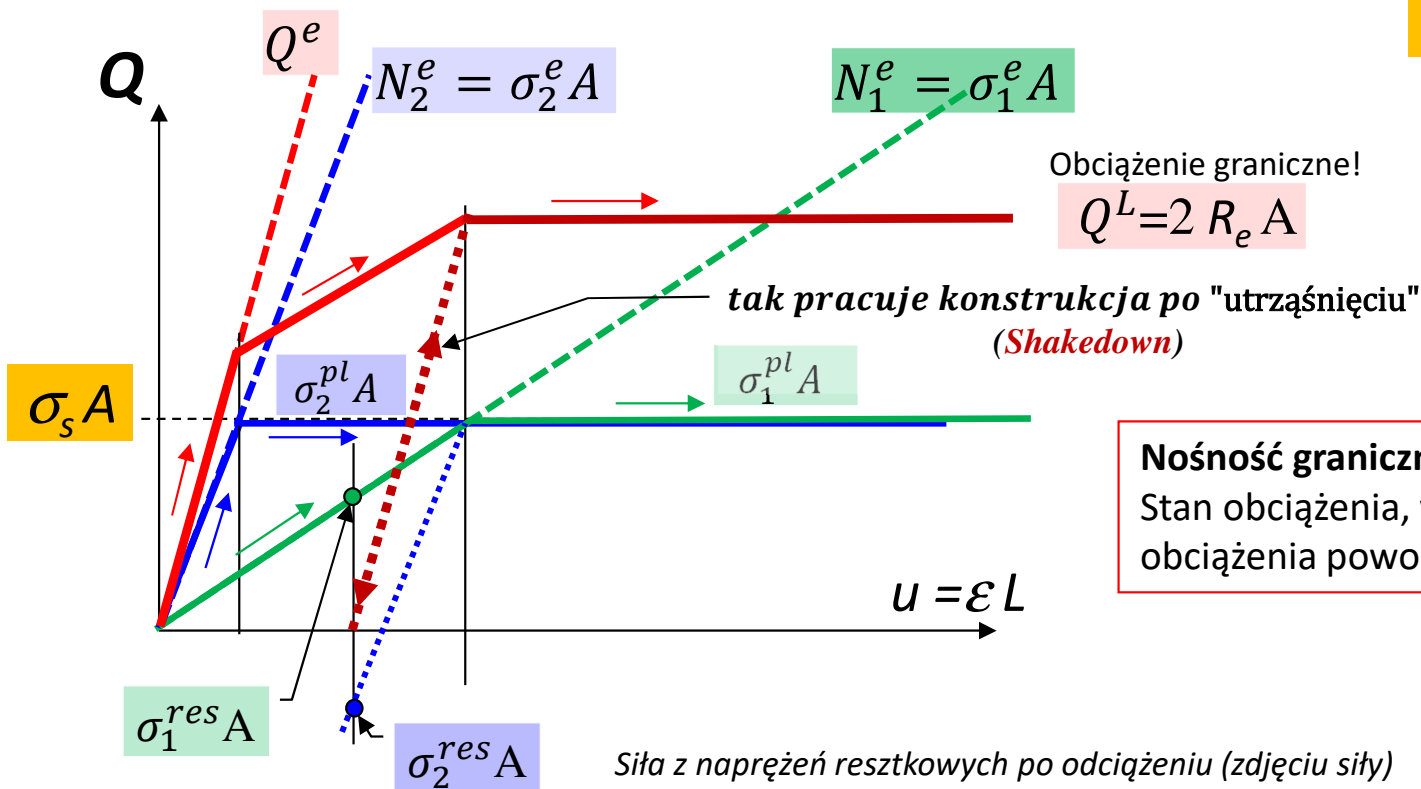


Siły rozciągające w prętach:

$$N_2 = \frac{4}{5} Q$$

$$N_1 = N_3 = \frac{1}{5} Q$$

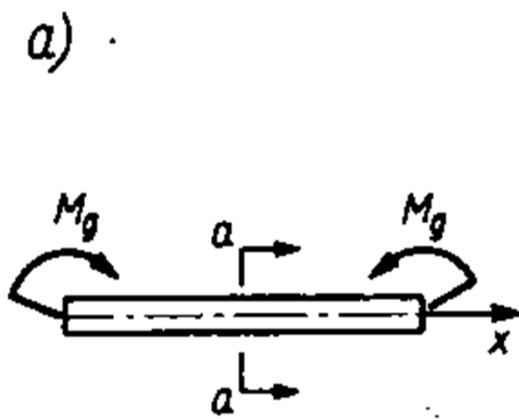
$$Q = (N_1 + N_2)$$



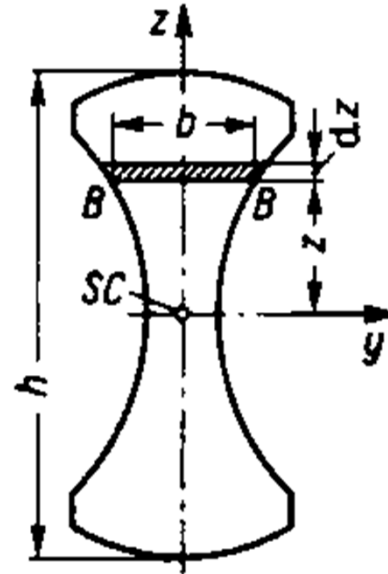
**Nośność graniczna:**  
Stan obciążenia, w którym niewielki wzrost obciążenia powoduje duży przyrost przemieszczeń

Siła z naprężeń resztkowych po odciążeniu (zdjęciu siły)

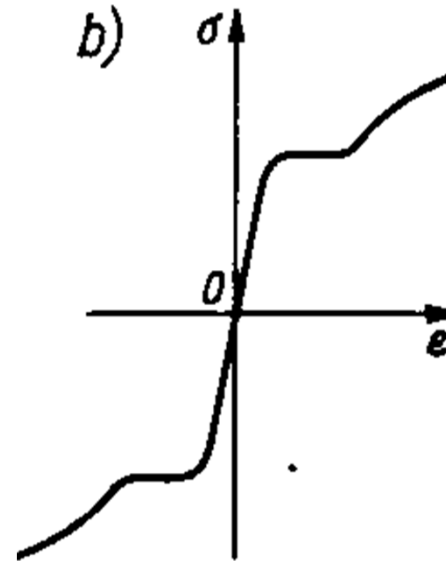
# Czyste zginanie sprężysto-plastyczne belki



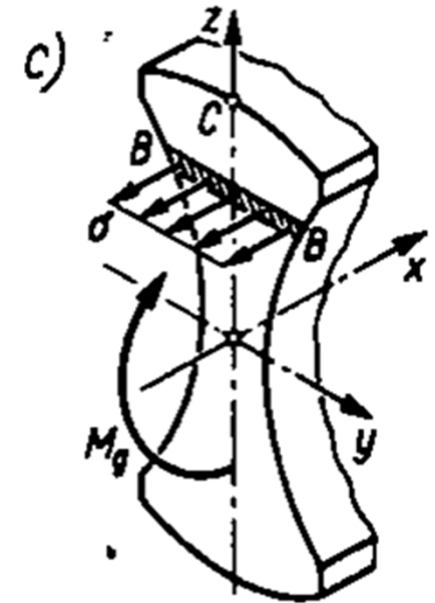
Belka obciążona czystym zginaniem



Przekrój poprzeczny



Wykres z próby rozciągania



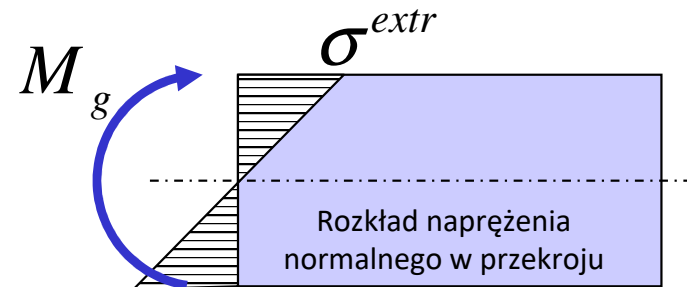
Naprężenia normalne w przekroju

W zakresie sprężystym rozkład naprężenia liczymy ze wzoru:

$$\sigma = -\frac{M_g \cdot z}{J_y}$$

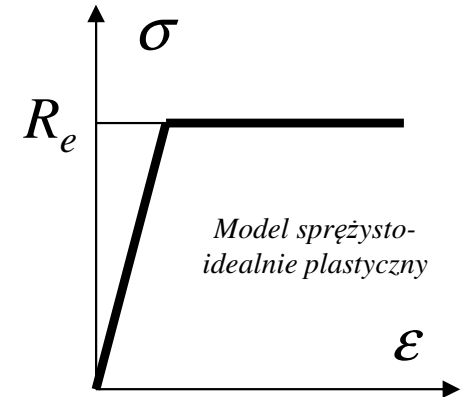
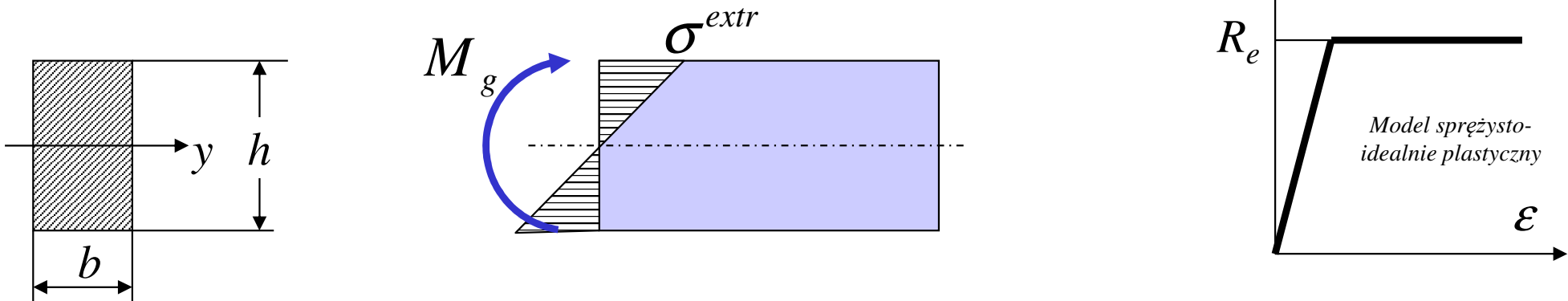


$$\sigma^{extr} = \frac{M_g \cdot \frac{h}{2}}{J_y}$$



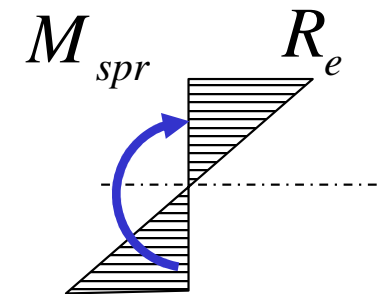
# Czyste zginanie sprężysto-plastyczne belki

Rozważmy zginanie belki o przekroju prostokątnym wykonanej z materiału o charakterystyce sprężysto-plastycznej bez umocnienia:



W zakresie sprężystym kres wzrostu naprężenia odpowiada osiągnięciu przez skrajne włókna naprężenia o wartości równej granicy plastyczności  $R_e$

Stąd możemy wyznaczyć maksymalny moment sprężysty dla przekroju prostokątnego:



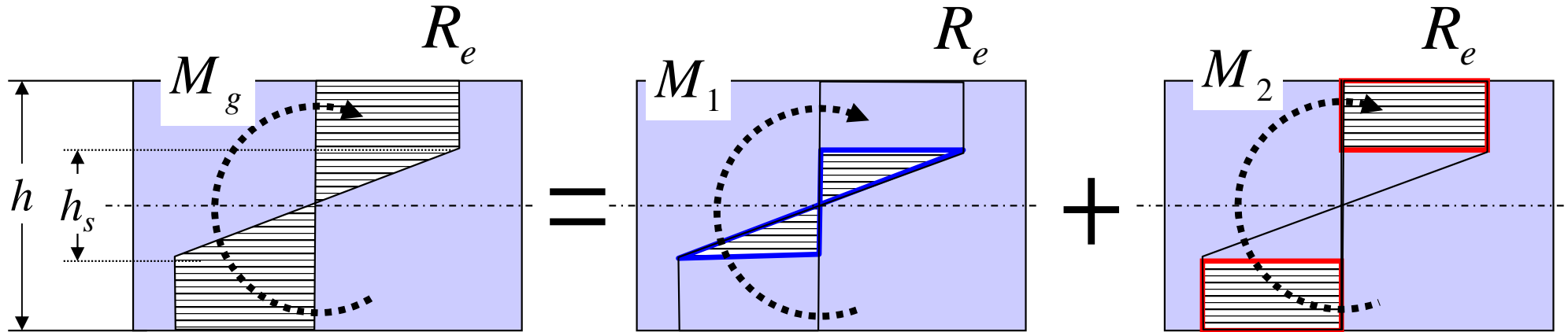
$$\sigma^{extr} = \frac{M_g \cdot \frac{h}{2}}{\frac{bh^3}{12}} = R_e$$



$$M_{spr} = \frac{R_e bh^2}{6}$$

# Czyste zginanie sprężysto-plastyczne belki

Po przekroczeniu maksymalnego momentu sprężystego kolejne włókna będą osiągały stan uplastycznienia, a rozkład naprężenia w przekroju będzie miał charakter trapezowy:



Ten rozkład można przedstawić jako superpozycję dwóch stanów, z których każdy odpowiada części całkowitego momentu gnącego:  $M_g = M_1 + M_2$

Możemy wyznaczyć wzór opisujący wartość tego momentu:

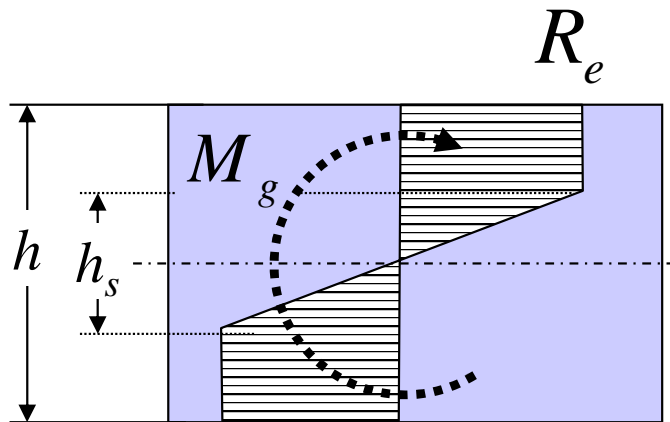
$$M_g = M_1 + M_2 = \frac{R_e h_s^2 b}{6} + b \cdot R_e \frac{(h-h_s)}{2} \cdot \frac{(h+h_s)}{2}$$

$$M_g = \frac{R_e b h^2}{6} \left[ \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \left( \frac{h_s}{h} \right)^2 \right]$$



$$M_g = M_{spr} \left[ \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \left( \frac{h_s}{h} \right)^2 \right]$$

# Czyste zginanie sprężysto-plastyczne belki



Moment gnący powodujący pracę sprężysto-plastyczną:

$$M_g = \frac{R_e b h^2}{6} \left[ \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \left( \frac{h_s}{h} \right)^2 \right]$$

Jeśli teraz odciążymy belkę, **proces ten będzie miał charakter sprężysty**:

$$\sigma_A = \frac{6M_g}{bh^2}$$

→

$$\sigma_A = \frac{1}{2} R_e \left[ 3 - \left( \frac{h_s}{h} \right)^2 \right]$$

$$\sigma_B = \sigma_A - R_e$$

→

$$\sigma_B = \frac{1}{2} R_e \left[ 1 - \left( \frac{h_s}{h} \right)^2 \right]$$

$$\sigma_C = \frac{M_g \frac{h_s}{2}}{\frac{bh^3}{12}} - R_e$$

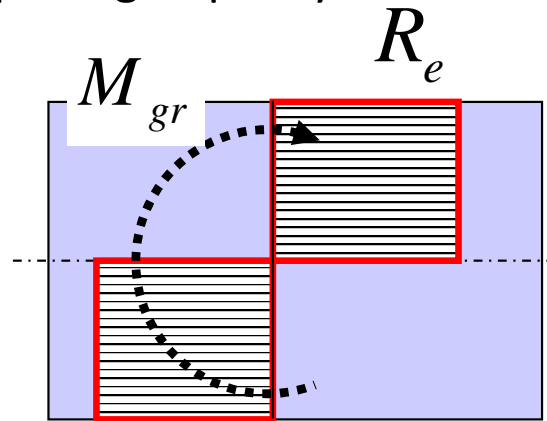
→

$$\sigma_C = \frac{1}{2} R_e \left[ 3 \cdot \left( \frac{h_s}{h} \right) - \left( \frac{h_s}{h} \right)^3 - 2 \right]$$

Po odciążeniu pozostaną **naprężenia resztkowe**

# Czyste zginanie sprężysto-plastyczne belki

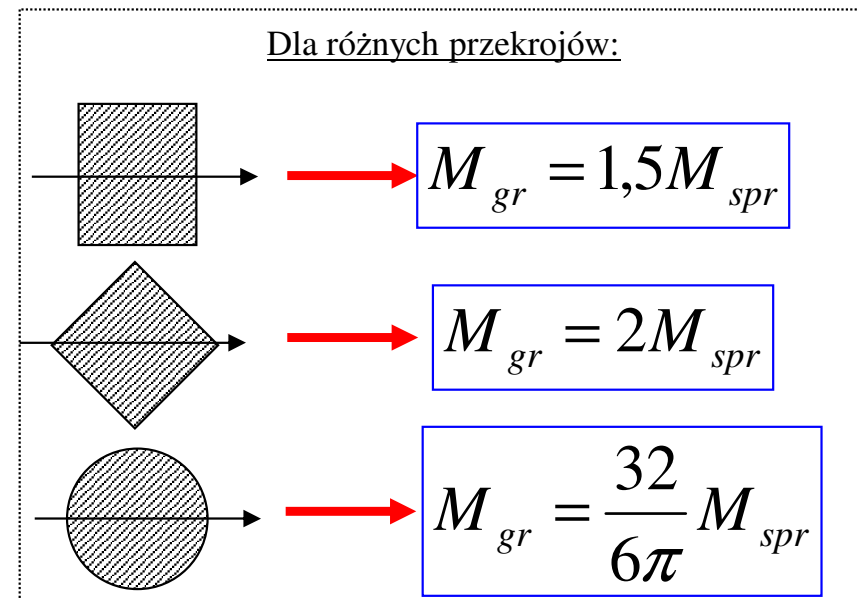
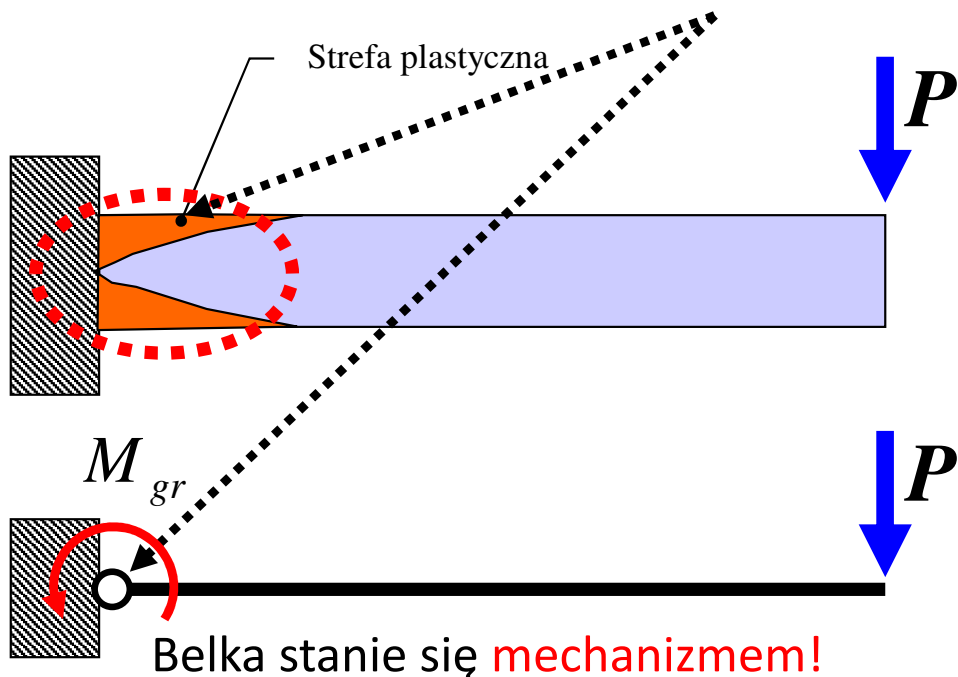
Dla pełnego uplastycznienia mamy **moment graniczny** (wyczerpanie nośności belki):



$$M_g = M_{spr} \left[ \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \left( \frac{h_s}{h} \right)^2 \right]$$

$$M_{gr} = M_g (h_s = 0) = 1,5M_{spr}$$

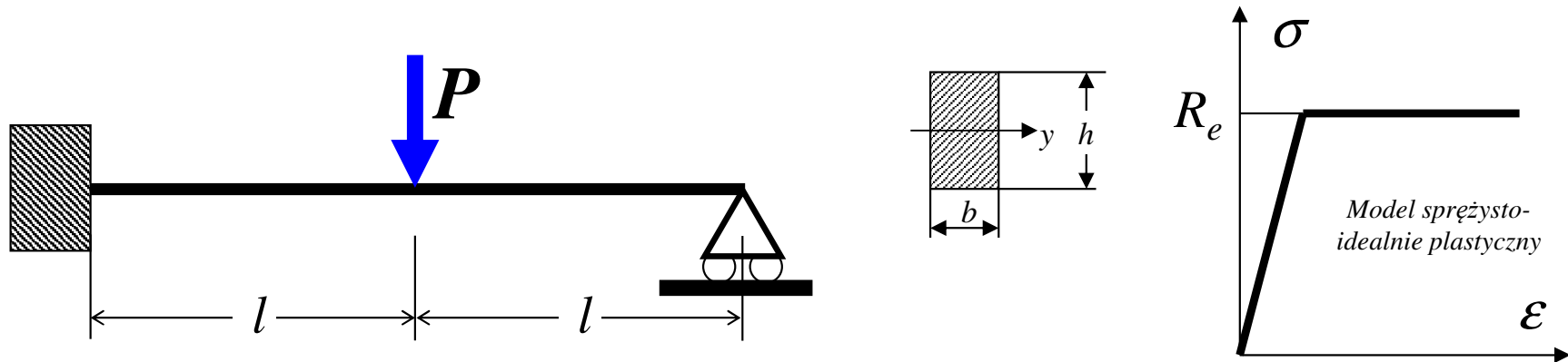
W belce wspornikowej, przy pełnym uplastycznieniu przekroju w strefie odkształceń plastycznych powstanie **przegub plastyczny!**



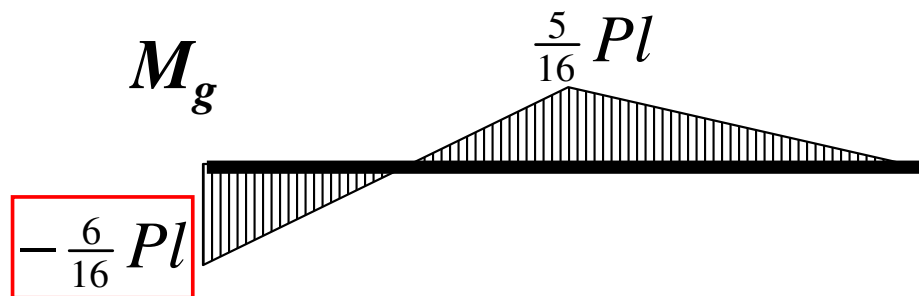


# Nośność graniczna belki zginanej

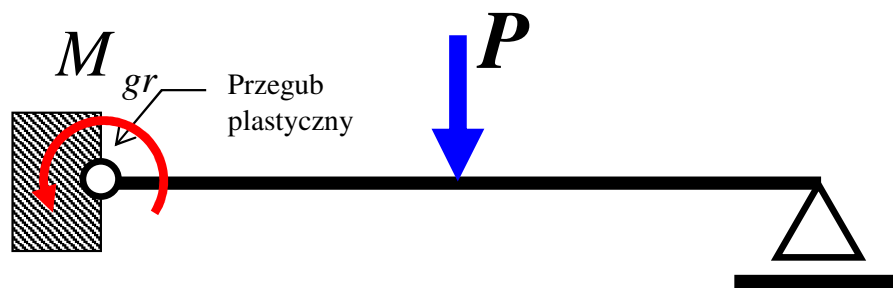
Rozważmy **statycznie niewyznaczalną belkę** o przekroju prostokątnym wykonaną z materiału o charakterystyce sprężysto-plastycznej bez umocnienia i podpartą jak na rysunku:



Stosując metodę M-M możemy wyznaczyć rozkład momentu gnącego w zakresie sprężystym:

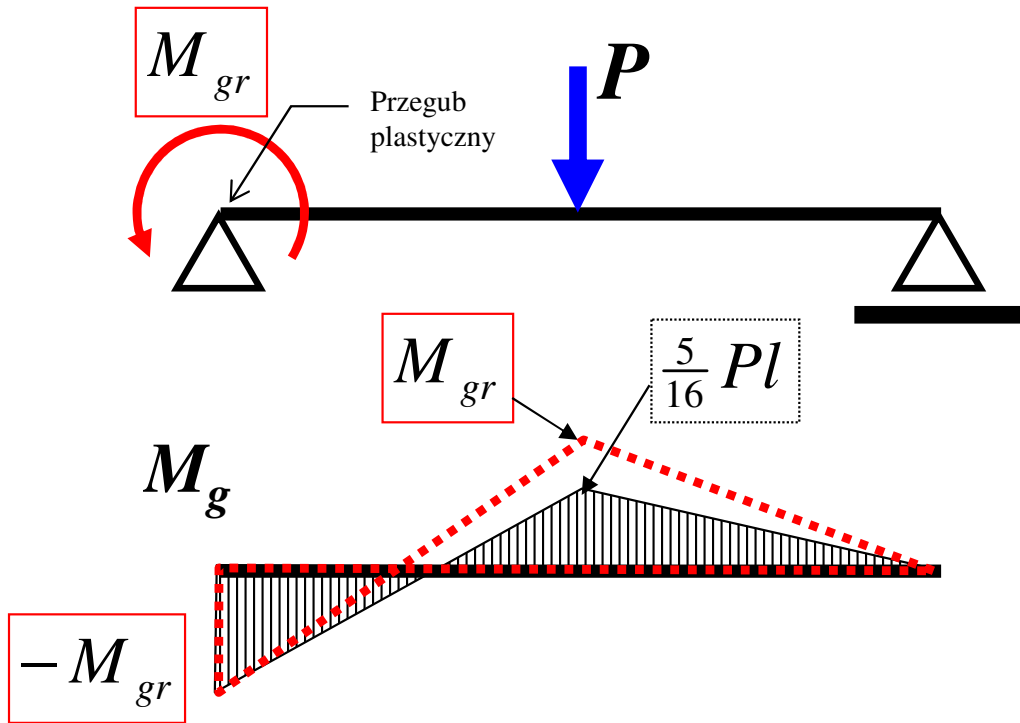


Moment gnący osiąga ekstremalną wartość w miejscu utwierdzenia belki.



Lewy koniec belki to przekrój, w którym najszybciej dojdzie do powstania pierwszych uplastycznień przy sile  $P_{spr}$ , a przy dalszym wzroście obciążenia może tu powstać przegub plastyczny.

# Nośność graniczna belki zginanej

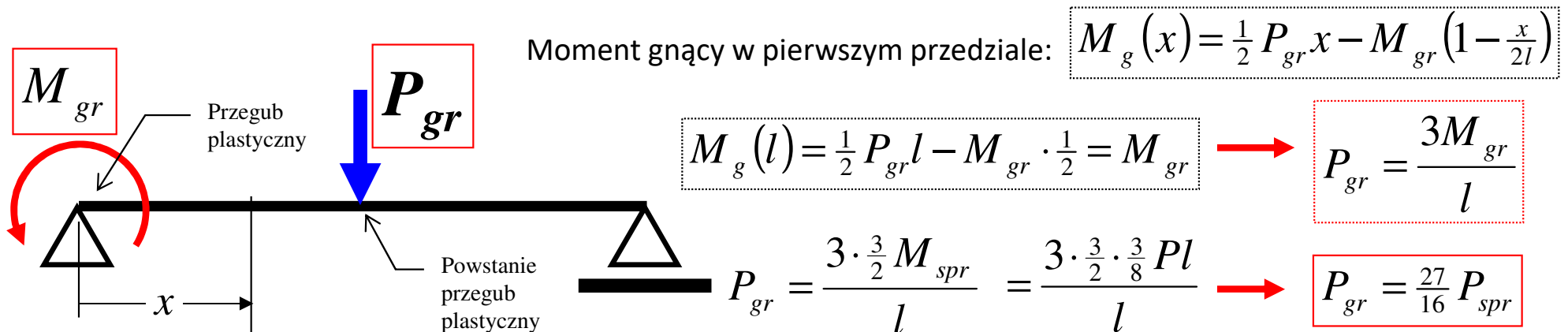


Powstał pierwszy przegub plastyczny (*pełne uplastycznienie przekroju*) zachowuje się tak, jakby belka była podparta przegubowo i obciążona dodatkowo momentem o wartości granicznej  $M_{gr}$  (wynikającym ze stanu naprężenia).

## Nośność graniczna:

Graniczny przypadek od którego belka przestanie pracować i stanie się mechanizmem.

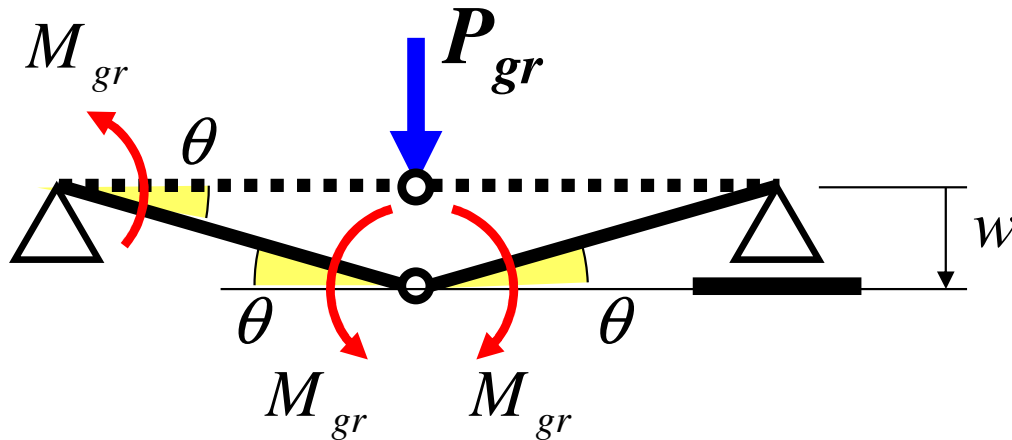
Chociaż na lewym końcu powstał przegub plastyczny, to jednak obciążenie może jeszcze wzrastać do momentu, gdy w innym przekroju wartość momentu osiągnie również wartość  $M_{gr}$  (powstanie drugi przegub plastyczny)



Utrata nośności zachodzi przy sile 1,688 razy większej niż ta, która spowodowała pierwsze uplastycznienie!

# Nośność graniczna belki zginanej

Lepszy sposób (z zasady prac przygotowanych): Przewidujemy mechanizm zniszczenia.



Warunek równowagi:

Suma prac sił wewnętrznych i zewnętrznych na dowolnych przemieszczeniach przygotowanych jest równa zero.

$$P_{gr} \cdot w - M_{gr} \cdot \theta - M_{gr} \cdot \theta - M_{gr} \cdot \theta = 0$$

$$P_{gr} \cdot w = 3M_{gr} \cdot \theta$$

$$P_{gr} \cdot w \cong 3M_{gr} \cdot \frac{w}{l}$$

$$P_{gr} = \frac{3M_{gr}}{l}$$

$$P_{gr} = \frac{3 \cdot \frac{3}{2} M_{spr}}{l} = \frac{3 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{8} Pl}{l}$$

$$P_{gr} = \frac{27}{16} P_{spr} \cong 1,688 \cdot P_{spr}$$

Utrata nośności zachodzi przy sile 1,688 razy większej niż ta, która spowodowała pierwsze uplastycznienie!